流れを計算する手法

　川の複雑な流れを正確に再現するためには，三次元計算を行うのが最も望ましいのですが，開発段階にあるのが実状であり，実用化には到っていません。近似的に流れを計算する手法としては，流れを一次元，準二次元，二次元，あるいは準三次元的に取り扱うことになります。
　またそれぞれの流れに対し，時間的および空間的な変化を考慮する違いによって，等流，不等流，不定流に分類されます。

注）等流，不等流，不定流

<table>
<tr><th colspan="4">流れの分類および概要</th></tr>
<tr><td rowspan="2">定常流</td><td rowspan="2">時間の経過によって水深や流速などが変化しないもの</td><td>等流</td><td>場所に対する変化がないもの。
水路内のどの断面においても水深や流速の等しい流れ。
例えば人工の水路などでは，流量が人為的に操作されるため，洪水とは無関係に一定量が流下します。また断面も人為的につくられたものであるため，場所ごとの変化もありません。このような流れが等流です。</td></tr>
<tr><td>不等流</td><td>場所に対する変化があるもの。
水路の断面が絶えず変化し水深や流速が各段面によって変化する流れ。通常（洪水のない場合），川を流れる流量は時間的にほぼ一定と考えられますが，水深や流速は場所ごとに異なります。このような流れが不等流です。</td></tr>
<tr><td>非定常流（不定流）</td><td colspan="3">時間の経過によって水深や流速などが変化するもの
例えば洪水時の河川では，川を流れる流量は一定ではなく，特に増水期や減水期には大きく変化します。また下水道なども時間により排水量が変化します。このような流れが不定流です。</td></tr>
</table>

水位計算手法の概要（流れの計算分類）

(1)　時間的，空間的分類

流れの計算式は時間的，空間的に変化するかどうかで次のように分類されます。河川の計画を立てる場合の目的や対象となる河川の状況に応じて使い分けされています。

流れの分類		概　　要	具体的な活用例
定常流	等流	等流計算は,断面形および勾配が縦断的に変化しないと考えられる水路に,時間的に一定の流量が流れる場合に水位や流速を計算するもの。	人工水路などの流れを計算する。
	不等流	不等流計算は,断面形および勾配が断面的におだやかに変化する水路に,時間的に一定の流量がながれる場合に水位や流速の縦断変化を計算するもの。	将来の計画時における流れの状態（水位）などを計算する。
不定流		不定流計算は流量の時間的変化が無視できない場合に、水位や流速の縦断的、時間的変化を計算するもの。	流量変化のある実河川の洪水を計算する。

(2)　空間的分類

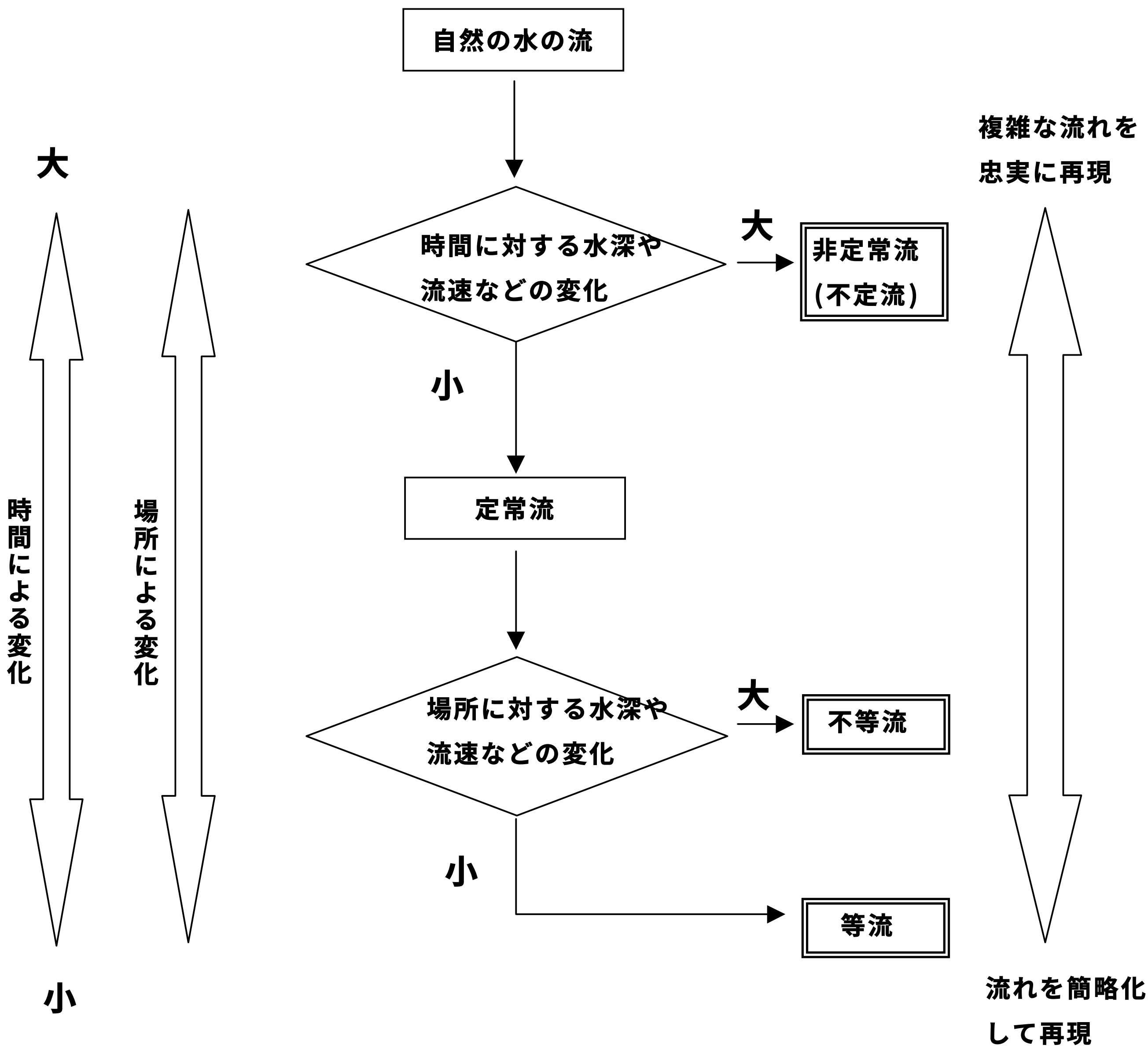
流れは空間的な広がりを持つことから，流れを解析するには３個の空間座標すなわち，三次元で解析する必要がありますが、実用上の目的から判断して、準３次元、２次元および１次元流れとして取り扱っています。

流れの分類	概　　要
１次元流れ	川の流れを一次元方向（川の流れ方向）について計算する手法。 横断方向の流れはないものとみなしているため、川の断面積がゆるやかに変化し、流れが一方向に卓越している場合に、実用的な手法である。
２次元流れ	川の流れを二次元方向（川の流れ方向と横断方向）について計算する手法。 深さ方向の流れはないものとみなしているため、川の幅方向に対して水深が浅い流れに対して適用する。
３次元流れ	川の流れを三次元方向（川の流れ方向、横断方向、深さ方向）について解析する計算手法。

流　れ　の　計　算　方　法

	等流	不等流	不定流
一次元解析	◎	◎	◎
準二次元解析	ー	◎	ー
二次元解析	ー	◎	◎
準三次元解析	ー	◎	○
三次元解析	ー	○	○

◎　：実用的手段として使用されている
○　：計算可能な手法として開発されている
ー：使用されていない



水の３大エネルギーとベルヌーイの定理

水の３大エネルギー

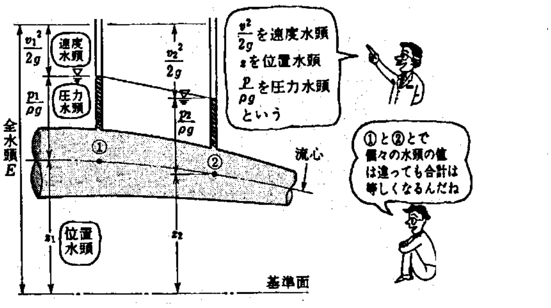
　水の流れに関するエネルギーには、固体と同様に運動エネルギーと位置エネルギーが存在します。また、流体特有のものとして圧力エネルギーがあります。この３つのエネルギーを合計したものを全エネルギーといいます。

　また、各エネルギーは、水頭という長さの単位で表すことができます。また、それぞれの各エネルギーを次のように表現することができます。

運動エネルギー	→	速度水頭（$v^2/2g$）
位置エネルギー	→	位置水頭（z）
圧力エネルギー	→	圧力水頭（$p/\rho g$）
全エネルギー	→	全水頭（$E = v^2/2g + z + p/\rho g$）

ベルヌーイの定理

　エネルギー保存の法則は、水の流れにも当てはまることから、水の粘性による摩擦などのエネルギー損失がない完全流体と仮定すれば、水路内の各断面で速度水頭､位置水頭及び圧力水頭の値は変化しても､その合計である全水頭は一定になります。つまり下図のように流管の①、②断面において各水　頭の値は異なりますが、その合計である全水頭は等しく次式が成立します。



$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = E$$

　この関係のように、エネルギー保存の法則を水の流れに当てはめたものをベルヌーイの定理といい、水位計算の基本的な考え方となります。

一次元等流計算

$$V = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} I^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = AV$$

V：流速（m/s）
A：河積　（m²）
R：径深　（m）
I　：勾配
Q：流量　（m³/s）
n：マニングの粗度係数

一次元不等流計算

$$H_2 + \frac{\alpha_2}{2g}\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 = H_1 + \frac{\alpha_1}{2g}\left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 + L$$

$$L = \frac{n_1^2 Q^2}{A_1^2 R_1^{4/3}} \frac{\varDelta x}{2} + \frac{n_2^2 Q_2^2}{A_2^2 R_2^{4/3}} \frac{\varDelta x}{2}$$

$$Q = AV$$

A：河積　（m²）
H：水位　（m）
R：径深　（m）
Q：流量　（m³/s）
g：重力加速度（m/s²）
n：マニングの粗度係数
Δx：流下方向の距離（m）
α：平均流速を用いることによる補正項
添え字の$_1$は下流側、$_2$は上流側を表わす。

一次元不定流計算

$$\frac{\eta}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha}{2g}\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{n^2}{R^{4/3}} u|u| = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -q$$

t ：　時間（s）　　x ：　流下方向の座標
u ：　流速（m/s）　H ：　水位　（m）
A ：　河積（m²）　Q ：　流量　（m³/s）
R ：　径深（m）　q ：　横流出量(m²/s)
n ：　マニングの粗度係数
g ：　重力加速度（m/s²）
α：　流速分布による係数

準二次元不等流計算

$$\frac{n_i^2 u_i^2}{R_i^{1/3}} S_{bi} + \frac{\sum_{j'} \left(\tau_{j'} S_{wj'}\right)}{\rho g} + \frac{\sum_{j} \left(\tau_j S_{wj}\right)}{\rho g} = A_i I_b$$

$$\left(H + \frac{1}{A}\sum \frac{u_i^2 A_i}{2g}\right)_2 - \left(H + \frac{1}{A}\sum \frac{u_i^2 A_i}{2g}\right)_1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{A}\sum \frac{n_i^2 u_i^2}{R_i^{1/3}} S_{bi}\right)_1 + \left(\frac{1}{A}\sum \frac{n_i^2 u_i^2}{R_i^{1/3}} S_{bi}\right)_2\right\} \varDelta X$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sum \tau_j S_{wj}}{\rho g A}\right)_1 + \left(\frac{\sum \tau_j S_{wj}}{\rho g A}\right)_2\right\} \varDelta X$$

$$Q = \sum_i \left(u_i A_i\right)$$

u_i ：平均流速（m/s）
ρ ：水の密度
n_i ：マニングの粗度係数
R_i ：径深　（m）
A_i ：有効河積（m²）
S_{bi} ：潤辺長　（m）
S_{wj} ：樹木群境界の潤辺長（m）
τ_j ：せん断応力（kg/m²）
I_b ：河床勾配
g ：重力加速度（m/s²）
⊿x：流下方向の距離（m）

二次元不等流計算

$$u\frac{\partial u}{\partial s}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{u\upsilon}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\tau_s}{\rho h}+2\frac{\partial}{\partial s}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

$$u\frac{\partial \upsilon}{\partial s}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial n}-\frac{u^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}-\frac{\tau_n}{\rho h}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\varepsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial s}\right)+2\frac{\partial}{\partial n}\left(\varepsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial n}\right)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\upsilon h)}{\partial n}=0$$

s ：流下方向の座標
n ：横断方向の座標
u ：水深平均流速（m/s）
υ ：水深平均流速（m/s）
h ： 水深（m）
p ： 圧力（kg/m²）
ρ ： 水の密度
r ： 曲率半径（m）
τ_s ：流下方向の河床せん断力（kg/m²）
τ_n ：横断方向の河床せん断力（kg/m²）

二次元不定流計算

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{\partial(uM)}{\partial x}+\frac{\partial(\upsilon M)}{\partial y}=-gh\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\tau_{xb}}{\rho}$$

$$\tau_{xb}=\frac{\rho g n^2 u\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{h^{1/3}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial(uN)}{\partial x}+\frac{\partial(\upsilon N)}{\partial y}=gh\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\tau_{yb}}{\rho}$$

$$\tau_{yb}=\frac{\rho g n^2 \upsilon\sqrt{u^2+\upsilon^2}}{h^{1/3}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0$$

h ：水深（m）
t ：時間（s）
M： x 方向の流量フラックス（$M=uh$）（m²/s）
N： y 方向の流量フラックス（N=υh）（m²/s）
u ：x 方向の流速（m/s）
υ ：y 方向の流速（m/s）
g ：重力加速度（m/s²）
ρ ：水の密度
τ_{xb} ：x 方向の底面せん断力（kg/m²）
τ_{yb} ：y 方向の底面せん断力（kg/m²）
n ：マニングの粗度係数

準三次元不等流計算

$$u\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}-\left(\int_{z0}^{z}\frac{\partial u}{\partial s}dz+\int_{z0}^{z}\frac{\partial v}{\partial n}dz+\int_{z0}^{z}\frac{v}{r}dz\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{uv}{r}=-g\frac{\partial H}{\partial s}+2\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial s}+v\frac{\partial v}{\partial n}-\left(\int_{z0}^{z}\frac{\partial u}{\partial s}dz+\int_{z0}^{z}\frac{\partial v}{\partial n}dz+\int_{z0}^{z}\frac{v}{r}dz\right)\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{u^2}{r}=-g\frac{\partial H}{\partial n}+\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial n^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial(u_0 h)}{\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_0 h)}{\partial n}=0$$

u,v ： s,n 方向の流速（m/s）
H ： 水位（m）
r ： 曲率半径（m）
g ： 重力加速度（m/s²）
ε ： 渦動粘性係数（m²/s）
h ： 水深（m）

準三次元不定流計算

$$\frac{Du}{Dt}=Fx-g\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'\upsilon'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{D\upsilon}{Dt}=Fy-g\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'\upsilon'}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{zb}^{H}u\cdot dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{zb}^{H}\upsilon\cdot dz=0$$

$$w=-\frac{\partial}{\partial x}\int_{zb}^{z}u\cdot dz-\frac{\partial}{\partial y}\int_{zb}^{z}\upsilon\cdot dz$$

x,y,z ：直交座標軸
u,v,w ：各座標軸方向の流速（m/s）
D/Dt ：実質微分
F_x,F_y,F_z ：外力（m/s²）
H ： 水位（m）
Z_b ： 河床底面の高さ
h ： 水深（m）
： 時間平均を表わす
′ ： 変動成分を表わす

三次元不等流計算

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'w'}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'w'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

x,y,z：直交座標軸
u,v,w：各座標軸方向の流速（m/s）
F_x,F_y,F_z：外力（m/s²）
p　：圧力（kg/m²）
H　：水位（m）
Z_b　：河床底面の高さ
h　：水深（m）
　：時間平均を表わす
´　：変動成分を表わす

三次元不定流計算

$$\frac{Du}{Dt}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{Dv}{Dt}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'v'}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'^2}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=Fx-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\overline{u'w'}-\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'w'}-\frac{\partial}{\partial z}\overline{w'^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

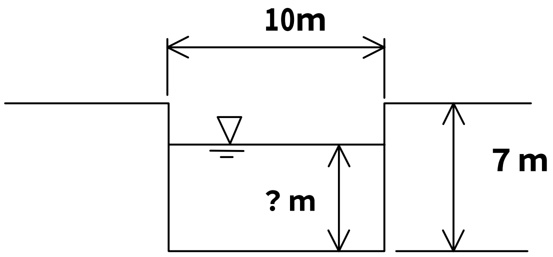
x,y,z：直交座標軸
u,v,w：各座標軸方向の流速（m/s）
D/Dt ＝ 実質微分
F_x,F_y,F_z：外力（m/s²）
p　：圧力（kg/m²）
H　：水位（m）
h　：水深（m）
　：時間平均を表わす
´　：変動成分を表わす

出典：水理公式集他

Ｌｅｔ’ｓ　Ｔｒｙ

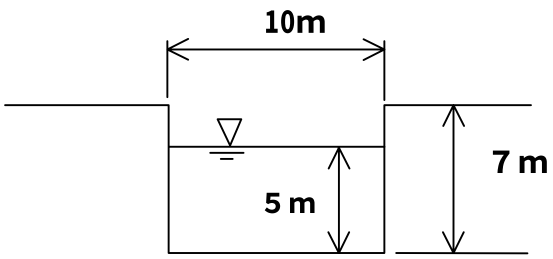
＜問１＞

幅１０ｍ，深さ７ｍの水路に２５０ｍ^3／ｓの水が流速５ｍ／ｓで流れています。この時の水深はいくらでしょうか？



＜問２＞

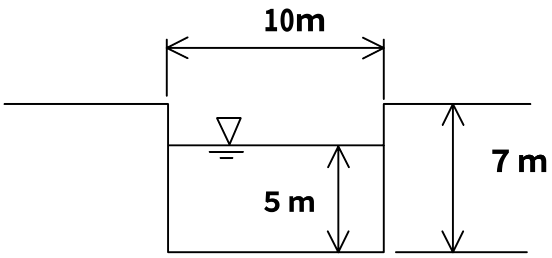
幅１０ｍ，深さ７ｍの水路に水深５ｍの水が毎秒５ｍの流速で流れています。流量はいくらでしょうか？



ヒント　　流量＝流積×流速

＜問３＞

幅１０ｍ，深さ７ｍの水路に水深５ｍの水が１／１，０００の動水勾配で流れています。粗度係数を０．０１とした場合の流量を求めてください。



ヒント

①　流量＝流積×流速
②　流速＝（１／粗度係数）×（径深）$^{2/3}$×（動水勾配）$^{1/2}$
③　径深＝（流積）／（潤辺）
④　２．５$^{2/3}$　１．８４，０．００１$^{1/2}$　０．０３